CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "VICTOR VÂLCOVICI"
Ediţia a XXI-a
Brăila, 11.05.2013

CLASA a VII-a

1. Fie ΔABC cu $AC = b,\ AB = c,\ c < b$ și punctele $E \in (AB,\ D \in (AC$ astfel încât $AE = AD = \dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$. Notăm cu K mijlocul segmentului $(AD),\ BC \cap ED = \{M\}$ și $AM \cap EK = \{T\}$.

Aflați valoarea raportului $\dfrac{\text{aria}(\Delta ETD)}{\text{aria}(\Delta TAD)}$.

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

2. Se consideră ΔABC și punctele $A' \in (BC),\ B' \in (AC)$ și $AA' \cap BB' = \{M\}$. Fie $\{C'\} = CM \cap AB$.

Calculați $\dfrac{MA}{MA'} \cdot \dfrac{MB}{MB'} \cdot \dfrac{MC}{MC'} - \dfrac{MA}{MA'} - \dfrac{MB}{MB'} - \dfrac{MC}{MC'}$.

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

3. Demonstrați că printre 2025 numere naturale distincte, există 729 numere a căror sumă este divizibilă cu 9.

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI”
Ediţia a XXI-a, Brăila,
11.05.2013

Clasa a VIII a

1. Aflaţi x şi y numere întregi care verifică ecuaţia:

$$\sqrt{x^2-32}+\sqrt{61-x^2}+\sqrt{37-y^2}=\sqrt{4x^2+4xy+y^2}.$$

Adela Dimov, profesor, Brăila

2. Arătaţi că nu există numere naturale x şi y astfel încât

$$\left(x^4+y^4-x^2y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)=2\cdot 4^{1006}.$$

Artur Bălăucă, profesor, Iaşi

3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se consideră punctele E şi F pe dreptele AA', respectiv, DD'. Determinaţi intersecţia planelor (EFB) şi (ABC), în cazurile:

a) $E\in(AA'$ şi $F\in(DD'$;

b) $E\in(AA'$ şi $F\notin[DD'$.

Constantin Apostol, profesor, Rm. Sărat

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediţia a XXI-a
Brăila, 11.05.2013

CLASA a IX-a

1. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică următoarele condiții:

(i) $\left|f(a)-f(b)\right|\le|a-b|$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$;

(ii) $f\left(f\left(f(0)\right)\right)=0.$

Calculați $f(0)$.

***

2. Demonstrați că, oricare ar fi $x,y,z\in[0,1]$, are loc inegalitatea:

$$\frac{x+y}{13+y^5+z^5}+\frac{y+z}{13+z^5+x^5}+\frac{z+x}{13+x^5+y^5}\le\frac{2}{5}.$$

Marius Damian, Brăila

3. Fie triunghiul *ABC* în care $AB\ne AC$, iar *I* este centrul cercului înscris în triunghi. Punctele *R* și *T* se află pe segmentele (AB) și respectiv (AC) astfel încât $BR=CT=x$, iar S este mijlocul segmentului (RT).

Să se arate că punctele *C*, *S*, *I* sunt coliniare dacă și numai dacă $x=\frac{ac}{2p}$, unde notațiile sunt cele cunoscute.

Enache Pătrașcu, Focșani

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

Concursul Interjudetean de Matematica
Victor Valcovici
Editia XXI, Braila 11.05.2013

Clasa a X a

1. Sa se determine numerele reale x si y care verifica egalitatea:

$$14\left[(x+y)^2+16x^2+16\log_2^2 y\right]=(9x+y+12\log_2 y)^2$$

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

2. Fie $z_k \in \mathbb{C}^*, |z_k| = r$, $(\forall)$ k $\in \{1,2,3\ldots2013\}$. Notam cu $P = z_1 z_2 \ldots z_{2013}$.
Sa se arate ca daca $z_k + \dfrac{P}{z_k} \in \mathbb{R}$, $(\forall)$ k $\in \{1,2,3\ldots2013\}$, atunci $P = 1$.

Cornel Noană și Enache Pătrașcu, profesori, Focșani

3. Lotul de elevi care reprezinta o scoala la concursurile de matematica este format din n elevi care se deplaseaza la diversele concursuri la care sunt invitati. Intr-o zi scoala lor primeste invitatie la doua concursuri de matematica situate in localitati diferite. Avand in vedere ca participarea la un concurs nu este obligatorie, ca numarul elevilor participanti nu este limitat de catre organizatori si ca nu este obligatoriu ca toti cei n elevi sa participe, se cere:

a) Sa se determine in cate moduri se pot organiza delegatiile de elevi la cele doua concursuri.

b) Daca in scoala sunt 2 profesori care insotesc elevii la concursuri, in cate moduri se pot constitui delegatiile de elevi si profesori daca la un concurs la care merg elevi merge si cel putin un profesor? (profesorii nu se deplaseaza la un concurs la care nu merg elevi)

Gabriel Andrei, profesor, Bacău

Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI”
Ediţia a XXI-a, Brăila,
11.05.2013

Clasa a XI a

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale strict pozitive, cu proprietatea că $a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x \geq n^{x+1}$, oricare ar fi $n \in N^*$ şi oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n > \ln(n^n + 1)$, oricare ar fi $n \in N^*$.

Carmen Botea si Viorel Botea, Brăila

2. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât suma elementelor de pe fiecare coloană este egală cu $k \in \mathbb{C}^*$. Aflaţi k ştiind că raportul dintre suma elementelor de pe coalana n a matricei A^{2013} şi suma elementelor de pe coloana $n-1$ a matricei A^{2012} este 2014.

Carmen Botea si Viorel Botea, Brăila

3. Aflaţi toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(f(x)) + 2f(x) = 3x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Carmen Botea si Viorel Botea, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.